23/11/2018

V δ.χ. $Y \leq V$, $Y_1, Y_2 \leq V \Rightarrow Y_1 \cap Y_2 \leq V$

$Y_1 \cup Y_2$ όχι πάντα υπόχωρος.

Ο μικρότερος υπόχωρος που περιέχει την ένωση είναι το άθροισμα $Y_1 + Y_2$, δηλ. $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y_1 + Y_2$ άθροισμα

$Y_1 + Y_2$, $Y_1 \cap Y_2$, Y_1, Y_2

$$\dim(Y_1 + Y_2) + \dim(Y_1 \cap Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2$$

$$Y_1 \oplus Y_2 \Leftrightarrow Y_1 \cap Y_2 = \{\bar{0}\}$$

Πόρισμα:

Αν Y_1, Y_2 είναι υπόχωροι ενός δ.χ. V τότε ισχύει $Y_1 \oplus Y_2 \Leftrightarrow \dim Y_1 \cap \dim Y_2 = 0$

$$Y_1 \cap Y_2 \leq Y_1, Y_2 \leq V$$

$$Y_1 \cap Y_2 = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow \dim Y_1 \cap Y_2 = 0$$

Ένα συμπλήρωμα του ενός υπόχωρου Y είναι ένας υπόχωρος Y' ώστε: $Y \oplus Y' = V$

$$\{\text{βάση}\} \to \{\text{βάση}, \text{βάση}\} \to \{\text{βάση}_{Y'}\}$$

π.χ. Να βρεθεί η τομή των υπόχωρων:

$Y_1 = \langle (x+1), (x^2+x), (x^3-1) \rangle$ και

$Y_2 = \langle (x^2-1), (x^3+x), (x-1) \rangle$ είναι υπόχωροι του P_3, $\dim P_3 = 4$.

Τα σύνολα $\{(x+1), (x^2+x), (x^3-1)\}$ και $\{(x^2+1), (x^3+x), (x-1)\}$ θα είναι βάσεις αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ελέγχουμε και δείχνουμε ότι είναι

$$\dim Y_1 = 3 = \dim Y_2$$

$$Y_1 + Y_2 = V_3, \quad \dim(Y_1+Y_2) = \underbrace{\dim Y_1}_{3} + \underbrace{\dim Y_2}_{3} - \dim Y_1 \cap Y_2$$

Ένα τυχαίο διάνυσμα τομής θα γράφεται σαν γρ. συνδυασμός των δύο βάσεων.

Πόρισμα:

Αν $Y_1, Y_2 \leq V$ και $\dim(Y_1 \cap Y_2) = \dim Y_1 = \dim Y_2 \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$

$\dim(Y_1 \cap Y_2) = \dim Y_1 \Rightarrow Y_1 \cap Y_2 = Y_1$ και $\dim(Y_1 \cap Y_2) \leq \dim Y_1, \dim Y_2$

$$Y_1 \cap Y_2 \leq Y_1, Y_2$$

$$(+)\ Y_1 = Y_2$$

$\alpha(x+1)+\beta(x^2+x)+\gamma(x^3-1) = \kappa(x^2-1)+\lambda(x^3+x)+\mu(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \gamma x^3+\beta x^2+(\alpha+\beta)x+(\alpha-\gamma) = \lambda x^3+\kappa x^2+(\mu+\lambda)+(\kappa-\mu)$

$\gamma=\lambda,\ \beta=\kappa,\ \alpha+\beta=\lambda+\mu \Rightarrow \alpha=\lambda+\mu-\beta$

$\alpha-\gamma=\kappa-\mu \Rightarrow \lambda+\mu-\kappa-\lambda=-\kappa-\mu \Rightarrow \mu=0$

Το τυχαίο διάνυσμα της τομής θα είναι

$\kappa(x^2-1)+\lambda(x^3+x) \quad \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

$Y_1\cap Y_2 = \langle (x^2-1), (x^3+x)\rangle$

$\dim Y_1\cap Y_2=2$

$\dim(Y_1+Y_2)=3+2-2=4 \Rightarrow Y_1+Y_2=P_3$

Ένα ευθύ συμπλήρωμα του Y_1 είναι το Y_1' με διάσταση 1

$Y_1' = \langle A\rangle$ με $f\notin Y_1,\ f\neq 0$

Ας πάρουμε το $f(x)=x^3$ ή x^2 ή x ή 1

$x^3\in Y_1 \Leftrightarrow Y_1'=\langle x^3\rangle$

$x^3=\alpha(x+1)+\beta(x^2+x)+\gamma(x^3-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3=\gamma x^3+\beta x^2+(\alpha+\beta)x+(\alpha-\gamma)$

$\gamma=1$

$\beta=0$

$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0\\ \alpha-\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha=1\end{array}\right\}$ Άτοπο οπότε το $x\notin Y_1$

Πρόταση: Έστω Y_1 και Y_2 διανυσματικοί υπόχωροι του V και $Y_1\oplus Y_2=V$. Τότε κάθε διάνυσμα $u\in V$ γράφεται μοναδικά ως $u=u_1+u_2$ με $u_1\in Y_1$ και $u_2\in Y_2$

Απόδειξη: Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ βάση του Y_1 και $\{w_1, \ldots, w_k\}$ βάση του Y_2

$Y_1 \oplus Y_2 = V \Rightarrow Y_1 \cap Y_2 = \{\bar{0}\} \Rightarrow w_i \notin Y_1$ για όλα τα $i = 1, \ldots, l$ και

$v_i \notin Y_2$ για όλα τα $j = 1, \ldots, k$

Άρα $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l\}$ αποτελεί βάση του V. Γνωρίζουμε ότι το τυχαίο u έχει μοναδική αναπαράσταση ως προς τη βάση.

$$u = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k + b_1 w_1 + \ldots + b_l w_l$$

Άρα $u = u_1 + u_2$ με

$$u_1 = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$$

$$u_2 = b_1 w_1 + \ldots + b_l w_l$$

- Σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A.

r = σχέση $(a_1, a_2) \in r \Leftrightarrow a_1$ σχετίζεται μέσω της r με το a_2

$$r \subseteq A \times A$$

1) Ανακλαστική $\forall a \in A \Leftrightarrow (a, a) \in r$
2) Συμμετρική Αν $(a, b) \in r \Rightarrow (b, a) \in r$
3) Μεταβατική Αν $(a, b) \in r$ και $(b, \gamma) \in r \Rightarrow (a, \gamma) \in r$

Μια κλάση ισοδυναμίας για $a \in R$ $\bar{a} = \{b \in A$ ώστε $(a, b) \in r\}$.

Το A χωρίζεται στις κλάσεις ισοδυναμίας.

Έστω $Y \leq V$. Ορίζουμε μια σχέση στο V, (δηλαδή στα στοιχεία του V) ως εξής.

$$v \sim w \Leftrightarrow v - w \in Y$$

σχετίζεται

Η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας αφού:

Αναυλ. 1) $V \sim V \iff V - V = \bar{0} \in Y$

Συμμ. 2) Αν $V \sim W$ τότε και $V - W = \bar{0} \in Y \iff W - V = \bar{0} \in Y \iff W \sim V$

Μεταβ. 3) Αν $V \sim W$ και $W \sim u \Rightarrow V - W \in Y$ και $W - u \in Y$.

$Y \leq V \Rightarrow V - W + W - u \in Y \iff V - u \in Y \iff V \sim u$

Έστω $v \in V$, θέλουμε τα στοιχεία του V τα οποία είναι ισοδύναμα με του $\bar{V} = \{u \mid v \sim w\} = ;; = \{v + w \mid w + Y\}$

Έστω $w \in Y$ τυχαίο, τότε το στοιχείο $v + w \sim v$ γιατί $v + w - v = w \in Y$

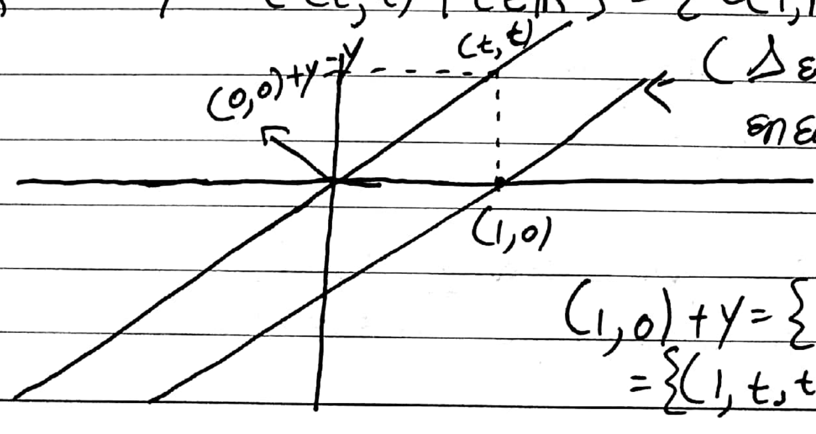
άρα, $v + w \in \bar{V} \ \forall w \in Y$

Έστω $u \in \bar{V} \iff u - v \in Y \iff \exists w \in Y$ ώστε $u - v = w \iff$
$\iff u = v + w$

Το σύνολο $\{v + w \mid w \in Y\}$ συμβολίζεται $\underset{\text{διάνυσμα}}{v} + \underset{\text{υπόχωρος}}{Y}$ και καλείται <u>σύμπλοκο</u> του V ως προς Y.

Δηλαδή, ένα σύμπλοκο είναι μια κλάση ισοδυναμίας

π.χ. $V = \mathbb{R}^2$ $\quad Y = \{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,1) \mid t \in \mathbb{R} = \langle (1,1) \rangle\}$



(Δεν είναι υπόχωρος επειδή δεν περιέχει το $(0,0)$)

$(1,0) + Y = \{(1,0) + (t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(1, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

<u>Προσοχή!</u> Το $V+Y$ δεν είναι υπόχωρος αν $V \notin Y$.

• <u>Γραμμικές Απεικονίσεις</u>

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω V και W δ.χ. Μια απεικόνιση $T: V \to W$ θα καλείται γραμμική αν ισχύει:
α) $T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \boxplus T(v_2)$
β) $T(c \odot v) = c \boxdot T(v)$

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $T(x) = \alpha x$ α σταθερός, $T(x+x') = \alpha(x+x') =$
$= \alpha x + \alpha x' = T(x) + T(x')$
$T(cx) = \alpha c x = c \cdot \alpha x = cT(x)$

π.χ. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $T(x) = (2x, 3x, -x)$
$T(x+x') = (2(x+x'), 3(x+x'), -(x+x')) = (2x, 3x, -x) +$
$(2x', 3x', -x') = T(x) + T(x')$
$T(cx) = cT(x)$
π.χ. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $T(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$
T γραμμική
π.χ. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $T(x) = x^2$, $T(x+x') = (x+x')^2 = \underset{T(x)}{\underset{\shortparallel}{x^2}} + \underset{☹}{\underset{\shortparallel}{2xx'}} + \underset{T(x')}{\underset{\shortparallel}{x'^2}}$

Άρα η T όχι γραμμική απεικόνιση

Έστω $T: \underset{\text{π.ο.}}{V} \to \underset{\text{π.τ.}}{W}$ γραμμική

$T(V)$: Σύνολο των εικόνων της T
$= \{ w \in W$ και $\exists\, u \in V$ με $T(u) = w \}$

$T(V) \subseteq W$

Ερώτημα: $T(V) \leq W$;;;

<u>Πρόταση</u>. Έστω $T: V \to W$ γρ. απεικόνιση, τότε $T(V) \leq W$

<u>Αποδ</u>: Έστω $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v)$,

$$T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in T(V)$$

$$cT(v_1) = T(cv_1) \in T(V)$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>.

Έστω $T: V \to W$ γρ. απεικόνιση.

1) Αν η T είναι "1-1", τότε θα καλείται μονομορφισμός

2) Αν η T είναι επί ($T(V) = W$) τότε θα καλείται επιμορφισμός.

3) Αν η T είναι 1-1 και επί, τότε θα καλείται ισομορφισμός και θα γράφουμε:

$$T: V \to W$$

Ιδιότητες

α) Η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική απεικόνιση

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "T'T"'] & W \arrow[r, "T'"] & Z \end{tikzcd}$$

$$T' \cdot T(v_1 + v_2) = T'(T(v_1 + v_2)) = T'(T(v_1) + T(v_2)) =$$

$$= T'T(v_1) + T'T(v_2)$$

$$T'T(cv) = T'(T(cv)) = T'(c(T(v))) = cT'(T(v))$$

β) Αν η T είναι ισομορφισμός, τότε ορίζεται

Scanned by CamScanner

η αντίστροφη $T^{-1}: W \to V$ η οποία είναι επίσης γραμμική απεικόνιση

$$T: V \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} W \Rightarrow T^{-1}: W \to V \text{ με } T^{-1}T = 1_V$$

και $TT^{-1} = 1_W$

$$T^{-1}(w_1+w_2) = T^{-1}(T(v_1)+T(v_2)) \overset{\text{γραμ.}}{=} T^{-1}(T(v_1+v_2)) =$$

$= \oplus$

$\exists\, v_1, v_2 \in V$ με $T(v_1) = w_1$ και $T(v_2) = w_2$ (T επί)

$\oplus$ $v_1+v_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$

Επίσης $T^{-1}(cw) = c \cdot T^{-1}(w)$.